

x^x (x の x 乗) について

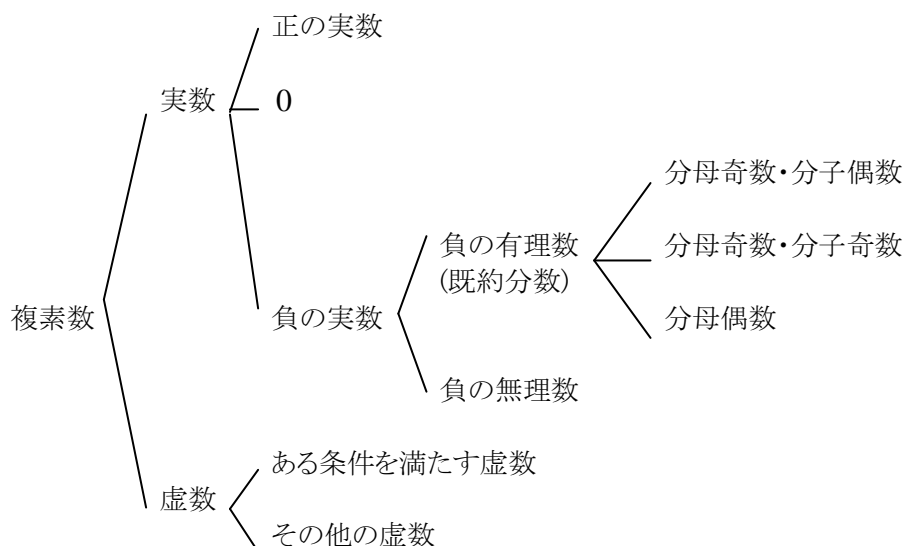
「私の愛情は本物か」

馬場博史
数学科

0. x の値による分類

x の値が実数のときでも x^x の値が虚数になる場合があり、 x の値が虚数のときでも x^x の値が実数になる場合がある。 x の値がどんなときに x^x の値は実数になるのか、またどんなときに虚数になるのかという考察である。結論から先に示し、そのあと具体例を見ていく。

< x の値 >

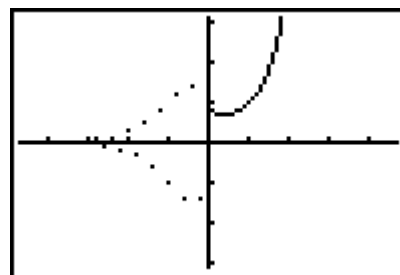


< x^x の値 >

正実数
値なし(または1)
正実数と虚数
負実数と虚数
虚数
虚数
正実数
虚数

1. x が正の実数の場合

x^x の値は正の実数。導関数 $f'(x) = x^x(\log x + 1)$ より、 $x = \frac{1}{e}$ で極小かつ最小でその値は $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ となる。 x が負の実数の場合については後述する。



ZOOM : ZDecimal (0.1 for 1 dot)

2. $x = 0$ の場合

0^0 を「値なし」とする人が多いが、 $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$ より便宜的に $0^0 = 1$ と定義する場合もある。 $\lim_{x \rightarrow -0} x^x$ については x の値が負の有理数で分母が奇数の場合に関する考察の後、再び述べることにする。

★以降、複素数を考えるので、よく使用される表示 $z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ として、 x^x を z^z と表記して考える。

$$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$\log z = \log|z| + i \arg z = \log r + \theta i$$

など、複素関数論の基本は既知とする。また、 e^z を $\exp(z)$ と表すこともある。

$z^z = e^{z \log z}$ であることを用いて、 $z \log z$ の値から考える。 $w = \log z = \log|z| + i \arg z$ は多価関数なので、 z^z の値も複数個存在することになる。1 の立方根が実数 1 個と虚数 2 個存在するのと同様に、多価を一価にすることにこだわらず、複数個の値を求めていくことにする。

3. z が負の有理数の場合

3.1. z が負の有理数(既約分数)で分母が奇数の場合(整数も含む)

すなわち、 $z = -\frac{k}{2m-1}$ (k, m は自然数)の場合、

$$\begin{aligned} z \log z &= -\frac{k}{2m-1} \log\left(-\frac{k}{2m-1}\right) \\ &= -\frac{k}{2m-1} \left\{ \log\left(\frac{k}{2m-1}\right) + \pi i + 2n\pi i \right\} \quad (n \text{ は整数}) \\ &= -\frac{k}{2m-1} \left\{ \log\left(\frac{k}{2m-1}\right) + (2n+1)\pi i \right\} \\ &= -\frac{k}{2m-1} \log\left(\frac{k}{2m-1}\right) - \frac{(2n+1)k\pi}{2m-1} i \end{aligned}$$

z^z の偏角 $-\frac{(2n+1)k\pi}{2m-1}$ は、その周期性を考慮して代表となる値を選べば、次の $2m-1$ 個の値をとる。

$$\theta_{(k,m)} = \left\{ \pm \frac{k\pi}{2m-1}, \pm \frac{3k\pi}{2m-1}, \dots, \frac{(2m-1)k\pi}{2m-1} \right\}$$

ただし、 $m=1$ のときは、 $\theta_{(k,1)} = \{ k\pi \}$

したがって、 z^z の値として次の $2m-1$ 個の値を得る。

$$z^z = e^{z \log z} = \left(\frac{k}{2m-1}\right)^{-\frac{k}{2m-1}} \left\{ \cos \theta_{(k,m)} + i \sin \theta_{(k,m)} \right\} \quad \textcircled{1}$$

このうち $\theta_{(k,m)} = \frac{(2m-1)k\pi}{2m-1} = k\pi$ のときのみ実数 (k が偶数のとき正、 k が奇数のとき負) になる。

まず負の整数の場合、

【例1】 $z = -1$ のとき、

$k=1, m=1$ だから、 $\theta_{(k,m)} = \{\pi\}$ となり、次の 1 個の値を得る。①より、

$$(-1)^{-1} = e^{-\log(-1)} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

【例2】 $z = -2$ のとき、

$k = 2$ 、 $m = 1$ だから、 $\theta_{(k,m)} = \{2\pi\}$ となり、次の1個の値を得る。①より、

$$(-2)^{-2} = e^{-2\log(-2)} = 2^{-2}(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = \frac{1}{4}$$

【例3】 $z = -3$ のとき、

$k = 3$ 、 $m = 1$ だから、 $\theta_{(k,m)} = \{3\pi\}$ となり、次の1個の値を得る。①より、

$$(-3)^{-3} = e^{-3\log(-3)} = 3^{-3}(\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = -\frac{1}{27}$$

以上、負の整数 $-k$ (k は自然数) だけをまとめると、

$$(-k)^{-k} = e^{-k\log(-k)} = k^{-k}(\cos k\pi + i \sin k\pi) = (-1)^k \frac{1}{k^k}$$

【例4】 $z = -\frac{1}{3}$ のとき、

$k = 1$ 、 $m = 2$ だから、 $\theta_{(k,m)} = \left\{ \pm \frac{\pi}{3}, \pi \right\}$ となり、次の3個の値を得る。①より、

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\log\left(-\frac{1}{3}\right)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \left\{ \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right\} = \sqrt[3]{3} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\log\left(-\frac{1}{3}\right)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} = \sqrt[3]{3} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\log\left(-\frac{1}{3}\right)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} (\cos \pi + i \sin \pi) = -\sqrt[3]{3}$$

【例5】 $z = -\frac{2}{3}$ のとき、

$k = 2$ 、 $m = 2$ だから、 $\theta_{(k,m)} = \left\{ \pm \frac{2\pi}{3}, 2\pi \right\}$ となり、次の3個の値を得る。①より、

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}\log\left(-\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \left\{ \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right\} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}\log\left(-\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \left\{ \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right\} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}\log\left(-\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$$

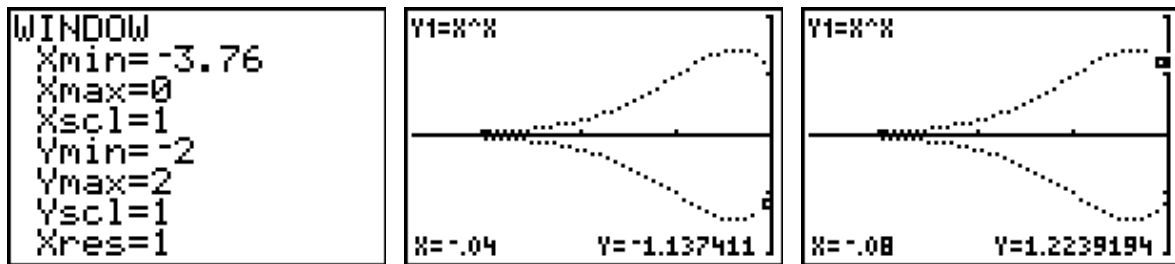
以上より、 $z = -\frac{k}{2m-1}$ (k, m は自然数) の場合、実数1個と虚数 $2m-2$ 個の値をとるので、「正の実数の奇数乗根」を求めること(例えば1の立方根は実数1個と虚数2個)と同様の結果を得る。

x を 0.1 ずつずらして値が実数になる点をとると、グラフは最初の図のようになるが、実際は無数の有理数がある間に存在するのでもっと稠密になる。(下図は x を 0.04 ずつずらして点をとった場合)

0^0 に関して再考する。 z が負の有理数で分母が奇数、すなわち $-\frac{k}{2m-1}$ (k, m は自然数) の場合、 z^z の値のうち、実数は、 m を限りなく大きくすると、 k が奇数の場合には -1 、偶数の場合には 1 に近づく。

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = -1 \quad (k \text{ は奇数})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1 \quad (k \text{ は偶数})$$



3.2. x が負の有理数(既約分数)で分母が偶数の場合

すなわち、 $z = -\frac{k}{2m}$ (k, m は自然数) の場合、

$$\begin{aligned} z \log z &= -\frac{k}{2m} \log\left(-\frac{k}{2m}\right) \\ &= -\frac{k}{2m} \left\{ \log\left(\frac{k}{2m}\right) + \pi i + 2n\pi i \right\} \quad (n \text{ は整数}) \\ &= -\frac{k}{2m} \left\{ \log\left(\frac{k}{2m}\right) + (2n+1)\pi i \right\} \\ &= -\frac{k}{2m} \log\left(\frac{k}{2m}\right) - \frac{(2n+1)k\pi}{2m} i \end{aligned}$$

z^z の偏角 $-\frac{(2n+1)k\pi}{2m}$ は、その周期性を考慮して代表となる値を選べば、次の $2m$ 個の値をとる。

$$\theta_{(k,m)} = \left\{ \pm \frac{k\pi}{2m}, \pm \frac{3k\pi}{2m}, \dots, \pm \frac{(2m-1)k\pi}{2m} \right\}$$

したがって、 z^z の値として次の $2m$ 個の値を得る。

$$z^z = e^{z \log z} = \left(\frac{k}{2m}\right)^{-\frac{k}{2m}} \left\{ \cos \theta_{(k,m)} + i \sin \theta_{(k,m)} \right\} \quad \textcircled{1}$$

このとき $2m$ 個の値はすべて虚数になる。

【例6】 $z = -\frac{1}{2}$ のとき、

$k = 1, m = 1$ だから、 $\theta_{(k,m)} = \left\{ \pm \frac{\pi}{2} \right\}$ となり、次の2個の値を得る。①より、

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\log\left(-\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right\} = \sqrt{2}(0+i) = \sqrt{2}i$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\log\left(-\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} = \sqrt{2}(0-i) = -\sqrt{2}i$$

【例7】 $z = -\frac{1}{4}$ のとき、

$k = 1, m = 2$ だから、 $\theta_{(k,m)} = \left\{ \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4} \right\}$ となり、次の4個の値を得る。①より、

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}\log\left(-\frac{1}{4}\right)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 1+i$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}\log\left(-\frac{1}{4}\right)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right\} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 1-i$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}\log\left(-\frac{1}{4}\right)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = -1+i$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}\log\left(-\frac{1}{4}\right)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \left\{ \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right\} = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = -1-i$$

【例8】 $z = -\frac{3}{4}$ のとき、

$k = 3, m = 2$ だから、 $\theta_{(k,m)} = \left\{ \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{9\pi}{4} \right\}$ となり、次の4個の値を得る。①より、

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} = e^{\frac{3}{4}\log\left(-\frac{3}{4}\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \frac{2}{\sqrt[4]{27}}(-1+i)$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} = e^{\frac{3}{4}\log\left(-\frac{3}{4}\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \left\{ \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right\} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \frac{2}{\sqrt[4]{27}}(-1-i)$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} = e^{\frac{3}{4}\log\left(-\frac{3}{4}\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \frac{2}{\sqrt[4]{27}}(1+i)$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} = e^{\frac{3}{4}\log\left(-\frac{3}{4}\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \left\{ \cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right) \right\} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \frac{2}{\sqrt[4]{27}}(1-i)$$

以上より、 $z = -\frac{k}{2m}$ (k, m は自然数) の場合、虚数 $2m$ 個の値をとるので、「負の実数の偶数乗根」を求めること(例えば -1 の平方根は虚数2個)と同様の結果を得る。

4. z が負の無理数の場合

$z = -r$ (r は正の無理数) とするとき、

$$\begin{aligned} z \log z &= -r(\log r + \pi i + 2n\pi i) \\ &= -r\{\log r + (2n+1)\pi i\} \\ &= -r \log r - (2n+1)r\pi i \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} (-r)^{-r} &= \exp\{-r \log r - (2n+1)r\pi i\} \\ &= \exp(-r \log r) \exp(-(2n+1)r\pi i) \\ &= r^{-r} \{\cos(-(2n+1)r\pi) + i \sin(-(2n+1)r\pi)\} \end{aligned}$$

$-r$ は有理数ではないので偏角 $-(2n+1)r\pi$ の値に周期性はなく、 $(-r)^{-r}$ は無限多価となる。よって、

z が負の無理数の場合、 z^z は無数に存在し、すべて虚数

$(-r)^{-r}$ の値は無数に存在するが、例を見るために、偏角の小さいものをひとつだけ表してみる。すなわち $z \log z = -r(\log r + \pi i)$ として、次の値を一例として求めてみる。

$$\begin{aligned} (-r)^{-r} &= \exp\{-r \log r - r\pi i\} \\ &= \exp(-r \log r) \exp(-r\pi i) \\ &= r^{-r} \{\cos(-r\pi) + i \sin(-r\pi)\} \end{aligned} \tag{2}$$

【例9】 $z = -\sqrt{2}$ のとき、 z^z の値のひとつは②より、

$$\begin{aligned} (-\sqrt{2})^{-\sqrt{2}} &= \sqrt{2}^{-\sqrt{2}} \{\cos(-\sqrt{2}\pi) + i \sin(-\sqrt{2}\pi)\} \\ &\doteq -0.1630939979 + 0.5904359195i \end{aligned}$$

【例10】 $z = -e$ のとき、 z^z の値のひとつは②より、

$$\begin{aligned} (-e)^{-e} &= e^{-e} \{\cos(-e\pi) + i \sin(-e\pi)\} \\ &\doteq -0.0417872966 - 0.0510709577i \end{aligned}$$

【例11】 $z = -\pi$ のとき、 z^z の値のひとつは②より、

$$\begin{aligned} (-\pi)^{-\pi} &= \pi^{-\pi} \{\cos(-\pi^2) + i \sin(-\pi^2)\} \\ &\doteq -0.0247567717 + 0.0118013091i \end{aligned}$$

5. z が虚数の場合

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($\theta \neq n\pi$, n は整数) とするとき、

$$\begin{aligned} z \log z &= z(\log |z| + i \arg z) \\ &= z(\log r + \theta i) \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta)(\log r + \theta i) \\ &= r\{\log r \cdot \cos \theta - \theta \cdot \sin \theta + i(\log r \cdot \sin \theta + \theta \cdot \cos \theta)\} \end{aligned} \tag{3}$$

一般の複素数の例を少し見てみよう。 z^z の値は無数に存在するが、例を見るために、偏角の小さいものをひとつだけ表してみる。すなわち $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($-\pi < \theta < \pi$, $\theta \neq 0$) として値を求めてみる。

【例12】 $z = 1+i$ のとき、正で最小の偏角は $\frac{\pi}{4}$ だから、

$$\begin{aligned} z \log z &= (1+i) \log(1+i) \\ &= (1+i) \left(\log \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i \right) \\ &= \log \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + i \left(\log \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

よって、 $(1+i)^{1+i}$ の値のひとつは、

$$\begin{aligned} (1+i)^{1+i} &= \exp \left\{ \log \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + i \left(\log \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &\doteq 0.2739572538 + 0.5837007588i \end{aligned}$$

【例13】 $z = 2+3i$ のとき、正で最小の偏角は $\tan^{-1} \frac{3}{2}$ だから、

$$\begin{aligned} z \log z &= (2+3i) \log(2+3i) \\ &= (2+3i) \left(\log \sqrt{13} + i \tan^{-1} \frac{3}{2} \right) \\ &= 2 \log \sqrt{13} - 3 \tan^{-1} \frac{3}{2} + i \left(3 \log \sqrt{13} + 2 \tan^{-1} \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

よって、 $(2+3i)^{2+3i}$ の値のひとつは、

$$\begin{aligned} (2+3i)^{2+3i} &= \exp \left\{ 2 \log \sqrt{13} - 3 \tan^{-1} \frac{3}{2} + i \left(3 \log \sqrt{13} + 2 \tan^{-1} \frac{3}{2} \right) \right\} \\ &\doteq 0.6075666647 - 0.3087560181i \end{aligned}$$

さて、 z が虚数のとき、 z^z の値が実数になることがあるのか。あるとすればどんな場合かを考えてみる。
③の $\{ \}$ 内の虚数部分が 0 になるときを考える。

$$\begin{aligned} \log r \cdot \sin \theta + \theta \cdot \cos \theta &= 0 \\ \log r \cdot \sin \theta &= -\theta \cdot \cos \theta \\ \log r &= \frac{-\theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta} \\ r &= \exp \left(\frac{-\theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta} \right) \end{aligned}$$

よって、 z が偏角 θ のときに絶対値 $r = \exp \left(\frac{-\theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta} \right)$ となるもの、すなわち

$$z = \exp \left(\frac{-\theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta} \right) (\cos \theta + i \sin \theta)$$

という形の虚数のとき、 z^z は実数になることがわかる。

z がこの形の虚数のとき、 z^z を求めよう。 $\log r = \frac{-\theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta}$ だから③より、

$$\begin{aligned} z \log z &= \exp\left(\frac{-\theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta}\right) \left\{ \left(\frac{-\theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta}\right) \cdot \cos \theta - \theta \cdot \sin \theta \right\} \\ &= \exp\left(\frac{-\theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta}\right) \left\{ \frac{-\theta \cdot (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{\sin \theta} \right\} \\ &= -\frac{\theta}{\sin \theta} \cdot \exp\left(\frac{-\theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta}\right) \end{aligned}$$

よって

$$z^z = e^{z \log z} = \exp\left\{-\frac{\theta}{\sin \theta} \cdot \exp\left(\frac{-\theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta}\right)\right\}$$

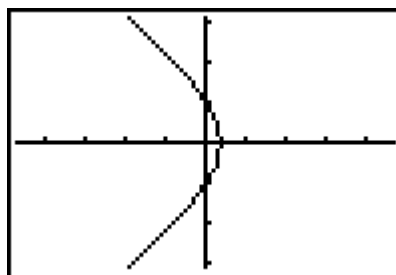
以上より、

z が $\exp\left(\frac{-\theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta}\right)(\cos \theta + i \sin \theta)$ という形の虚数のとき、
 z^z は $\exp\left\{-\frac{\theta}{\sin \theta} \cdot \exp\left(\frac{-\theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta}\right)\right\}$ という実数になる。

④

ガウス平面上に条件を満たす虚数をプロットしてみる。

```
Plot1 Plot2 Plot3
:r1=exp(-theta*cos(theta)/
sin(theta))
:r2=
:r3=
:r4=
:r5=
:r6=
```



条件を満たす虚数の分布 ($-\pi < \theta < \pi$) MODE: Pol, ZOOM: ZDecimal

特に、 $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) のとき z は純虚数となり、このとき絶対値 $r = \exp\left(\frac{-\theta \cdot \cos \theta}{\sin \theta}\right) = 1$ となるので、 z^z が実数になる純虚数 z は $\pm i$ に限る。上のグラフの虚軸との交点が $\pm i$ である。

z^z が実数になる場合を確認してみよう。

【例14】 $\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n は整数) で④の条件を満たす z 、すなわち $z = i$ のとき、

$$z \log z = i \log i = i \left\{ \log 1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) i \right\} = -\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

よって

$$i^i = \exp\left\{-\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right\}$$

例えば $n = 0$ のときは、

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \doteq 0.2078795764$$

となるが、他にも $n = 1$ のとき $i^i = e^{-\frac{5\pi}{2}}$ 、 $n = 2$ のとき $i^i = e^{-\frac{9\pi}{2}}$ など無数に存在する。しかも、すべてが正の実数となる。

以上の結果としてわかったのは、

i の i 乗は実数であった *i.e.* 「私の愛情は本物であった」

【例15】 $\theta = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n は整数) で④の条件を満たす z 、すなわち $z = -i$ のとき、

$$z \log z = (-i) \log(-i) = -i \left\{ \log 1 + \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) i \right\} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

よって

$$(-i)^{-i} = \exp\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

例えば $n = 0$ のときは、

$$(-i)^{-i} = e^{-\frac{\pi}{2}} \doteq 0.2078795764$$

となるが、他にも $n = 1$ のとき $(-i)^{-i} = e^{-\frac{3\pi}{2}}$ 、 $n = 2$ のとき $(-i)^{-i} = e^{-\frac{7\pi}{2}}$ など無数に存在する。しかも、すべてが正の実数となる。

他にも z^z が実数になる場合を見てみよう。

【例16】 $\theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ (n は整数) で④の条件を満たす z 、すなわち r が次の値になる場合、

$$r = \exp\left\{ \frac{-\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)} \right\}$$

$n = 0$ のとき、すなわち

$$z = \exp\left\{ \frac{-\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} \right\} \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \right) = \exp\left(\frac{-\sqrt{3}\pi}{6}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

のとき、④より、

$$z^z = \exp\left\{ -\frac{\pi}{3} \cdot \exp\left(\frac{-\sqrt{3}\pi}{6}\right) \right\} \doteq 0.6551891784$$

$n = 1$ のとき、すなわち

$$z = \exp\left(\frac{-\frac{13\pi}{6} \cdot \cos \frac{13\pi}{6}}{\sin \frac{13\pi}{6}}\right) \left(\cos \frac{13\pi}{6} + i \sin \frac{13\pi}{6}\right) = \exp\left(\frac{-13\sqrt{3}\pi}{6}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

のとき、④より、

$$z^z = \exp\left\{-\frac{13\pi}{3} \cdot \exp\left(\frac{-13\sqrt{3}\pi}{6}\right)\right\} \doteq 0.9998967834$$

さらに n の値を変えると、 z^z の値は無数に存在する。しかも、すべてが正の実数となる。

<参考文献> 「 x の x 乗のはなし」 土基善文著 日本評論社 2002年