x^x（x の x 乗）について

「私の愛情は本物か」

馬場博史
数学科

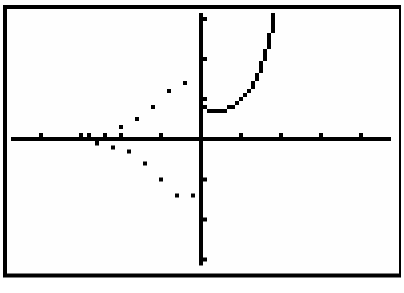
0．x の値による分類

x の値が実数のときでも x^x の値が虚数になる場合があり、x の値が虚数のときでも x^x の値が実数になる場合がある。x の値がどんなときに x^x の値は実数になるのか、またどんなときに虚数になるのかという考察である。結論から先に示し、そのあと具体例を見ていく。

＜x の値＞				＜x^x の値＞
複素数	実数	正の実数		正実数
		0		値なし（または1）
		負の実数	負の有理数（既約分数） 分母奇数・分子偶数	正実数と虚数
			負の有理数（既約分数） 分母奇数・分子奇数	負実数と虚数
			負の有理数（既約分数） 分母偶数	虚数
			負の無理数	虚数
	虚数	ある条件を満たす虚数		正実数
		その他の虚数		虚数

1．x が正の実数の場合

x^x の値は正の実数。導関数 $f'(x) = x^x(\log x + 1)$ より、$x = \dfrac{1}{e}$ で極小かつ最小でその値は $\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ となる。x が負の実数の場合については後述する。



ZOOM：ZDecimal (0.1 for 1 dot)

2．$x = 0$ の場合

0^0 を「値なし」とする場合が多いが、$\lim_{x \to +0} x^x = 1$ より便宜的に $0^0 = 1$ と定義する場合もある。$\lim_{x \to -0} x^x$ については x の値が負の有理数で分母が奇数の場合に関する考察の後、再び述べることにする。

★以降、複素数を考えるので、よく使用される表示 $z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ として、x^x を z^z と表記して考える。

$$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\sin y)$$
$$\log z = \log|z| + i\arg z = \log r + \theta i$$

など、複素関数論の基本は既知とする。また、e^z を $\exp(z)$ と表すこともある。

$z^z = e^{z\log z}$ であることを用いて、$z\log z$ の値から考える。$w=\log z=\log|z|+i\arg z$ は多価関数なので、z^z の値も複数個存在することになる。１の立方根が実数１個と虚数２個存在するのと同様に、多価を一価にすることにこだわらず、複数個の値を求めていくことにする。

３．z が負の有理数の場合

3.1. z が負の有理数（既約分数）で分母が奇数の場合（整数も含む）

すなわち、$z=-\dfrac{k}{2m-1}$ （k、m は自然数）の場合、

$$\begin{aligned} z\log z &= -\frac{k}{2m-1}\log\left(-\frac{k}{2m-1}\right) \\ &= -\frac{k}{2m-1}\left\{\log\left(\frac{k}{2m-1}\right)+\pi i+2n\pi i\right\} \quad (n\text{は整数}) \\ &= -\frac{k}{2m-1}\left\{\log\left(\frac{k}{2m-1}\right)+(2n+1)\pi i\right\} \\ &= -\frac{k}{2m-1}\log\left(\frac{k}{2m-1}\right)-\frac{(2n+1)k\pi}{2m-1}i \end{aligned}$$

z^z の偏角 $-\dfrac{(2n+1)k\pi}{2m-1}$ は、その周期性を考慮して代表となる値を選べば、次の $2m-1$ 個の値をとる。

$$\theta_{(k,m)} = \left\{ \pm\frac{k\pi}{2m-1} \text{、} \pm\frac{3k\pi}{2m-1} \text{、} \cdots\cdots \text{、} \frac{(2m-1)k\pi}{2m-1} \right\}$$

ただし、$m=1$ のときは、$\theta_{(k,1)} = \{\ k\pi\ \}$

したがって、z^z の値として次の $2m-1$ 個の値を得る。

$$z^z = e^{z\log z} = \left(\frac{k}{2m-1}\right)^{-\frac{k}{2m-1}}\left\{\cos\theta_{(k,m)} + i\sin\theta_{(k,m)}\right\} \qquad ①$$

このうち $\theta_{(k,m)} = \dfrac{(2m-1)k\pi}{2m-1} = k\pi$ のときのみ実数（k が偶数のとき正、k が奇数のとき負）になる。

まず負の整数の場合、

【例1】$z=-1$ のとき、

$k=1$、$m=1$ だから、$\theta_{(k,m)}=\{\pi\}$ となり、次の1個の値を得る。①より、

$$(-1)^{-1} = e^{-\log(-1)} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

【例2】$z=-2$ のとき、

$k=2$ 、$m=1$だから、$\theta_{(k,m)}=\{2\pi\}$となり、次の1個の値を得る。①より、

$$(-2)^{-2}=e^{-2\log(-2)}=2^{-2}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=\frac{1}{4}$$

【例3】$z=-3$ のとき、

$k=3$ 、$m=1$だから、$\theta_{(k,m)}=\{3\pi\}$となり、次の1個の値を得る。①より、

$$(-3)^{-3}=e^{-3\log(-3)}=3^{-3}(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=-\frac{1}{27}$$

> 以上、負の整数$-k$（kは自然数）だけをまとめると、
>
> $$(-k)^{-k}=e^{-k\log(-k)}=k^{-k}(\cos k\pi+i\sin k\pi)=(-1)^k\frac{1}{k^k}$$

【例4】$z=-\dfrac{1}{3}$ のとき、

$k=1$、$m=2$ だから、$\theta_{(k,m)}=\left\{\ \pm\dfrac{\pi}{3}\ 、\ \pi\ \right\}$となり、次の3個の値を得る。①より、

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}=e^{-\frac{1}{3}\log\left(-\frac{1}{3}\right)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\left\{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right\}=\sqrt[3]{3}\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}=e^{-\frac{1}{3}\log\left(-\frac{1}{3}\right)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\sqrt[3]{3}\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}=e^{-\frac{1}{3}\log\left(-\frac{1}{3}\right)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\sqrt[3]{3}$$

【例5】$z=-\dfrac{2}{3}$ のとき、

$k=2$ 、$m=2$ だから、$\theta_{(k,m)}=\left\{\ \pm\dfrac{2\pi}{3}\ 、\ 2\pi\ \right\}$となり、次の3個の値を得る。①より、

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}=e^{-\frac{2}{3}\log\left(-\frac{2}{3}\right)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}\left\{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right\}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}=e^{-\frac{2}{3}\log\left(-\frac{2}{3}\right)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}\left\{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right\}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\left\{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}=e^{-\frac{2}{3}\log\left(-\frac{2}{3}\right)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$$

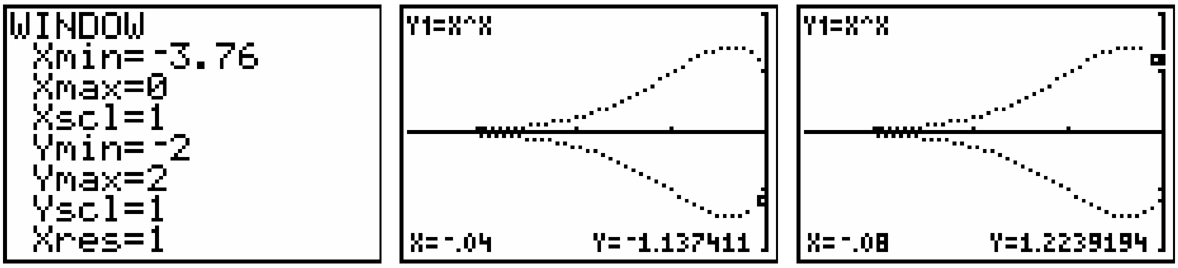
以上より、$z=-\dfrac{k}{2m-1}$ （k、m は自然数）の場合、実数1個と虚数 $2m-2$ 個の値をとるので、「正の実数の奇数乗根」を求めること（例えば1の立方根は実数1個と虚数2個）と同様の結果を得る。

x を 0.1 ずつずらして値が実数になる点をとると、グラフは最初の図のようになるが、実際は無数の有理数がその間に存在するのでもっと稠密になる。（下図は x を 0.04 ずつずらして点をとった場合）

0^0 に関して再考する。z が負の有理数で分母が奇数、すなわち $-\dfrac{k}{2m-1}$（k、m は自然数）の場合、z^z の値のうち、実数は、m を限りなく大きくすると、k が奇数の場合には－1、偶数の場合には1に近づく。

$$\lim_{x\to -0} x^x = -1 \qquad （k は奇数）$$

$$\lim_{x\to -0} x^x = 1 \qquad （k は偶数）$$



3.2. x が負の有理数（既約分数）で分母が偶数の場合

すなわち、$z=-\dfrac{k}{2m}$ （k、m は自然数）の場合、

$$\begin{aligned}
z\log z &= -\frac{k}{2m}\log\left(-\frac{k}{2m}\right) \\
&= -\frac{k}{2m}\left\{\log\left(\frac{k}{2m}\right)+\pi i+2n\pi i\right\} \quad （n は整数） \\
&= -\frac{k}{2m}\left\{\log\left(\frac{k}{2m}\right)+(2n+1)\pi i\right\} \\
&= -\frac{k}{2m}\log\left(\frac{k}{2m}\right)-\frac{(2n+1)k\pi}{2m}i
\end{aligned}$$

z^z の偏角 $-\dfrac{(2n+1)k\pi}{2m}$ は、その周期性を考慮して代表となる値を選べば、次の $2m$ 個の値をとる。

$$\theta_{(k,m)}=\left\{ \pm\frac{k\pi}{2m} 、 \pm\frac{3k\pi}{2m} 、 \cdots\cdots 、 \pm\frac{(2m-1)k\pi}{2m} \right\}$$

したがって、z^z の値として次の $2m$ 個の値を得る。

$$z^z = e^{z\log z} = \left(\frac{k}{2m}\right)^{-\frac{k}{2m}}\left\{\cos\theta_{(k,m)}+i\sin\theta_{(k,m)}\right\} \qquad ①$$

このとき $2m$ 個の値はすべて虚数になる。

【例6】$z=-\dfrac{1}{2}$ のとき、

$k=1$、$m=1$だから、$\theta_{(k,m)}=\left\{\ \pm\dfrac{\pi}{2}\ \right\}$となり、次の2個の値を得る。①より、

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}\log\left(-\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left\{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right\}=\sqrt{2}(0+i)=\sqrt{2}\,i$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}\log\left(-\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\sqrt{2}(0-i)=-\sqrt{2}\,i$$

【例7】$z=-\dfrac{1}{4}$ のとき、

$k=1$、$m=2$だから、$\theta_{(k,m)}=\left\{\ \pm\dfrac{\pi}{4}\ 、\ \pm\dfrac{3\pi}{4}\ \right\}$となり、次の4個の値を得る。①より、

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}=e^{-\frac{1}{4}\log\left(-\frac{1}{4}\right)}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=1+i$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}=e^{-\frac{1}{4}\log\left(-\frac{1}{4}\right)}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=1-i$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}=e^{-\frac{1}{4}\log\left(-\frac{1}{4}\right)}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-1+i$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}=e^{-\frac{1}{4}\log\left(-\frac{1}{4}\right)}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}\left\{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right\}=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-1-i$$

【例8】$z=-\dfrac{3}{4}$ のとき、

$k=3$、$m=2$だから、$\theta_{(k,m)}=\left\{\ \pm\dfrac{3\pi}{4}\ 、\ \pm\dfrac{9\pi}{4}\ \right\}$となり、次の4個の値を得る。①より、

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}=e^{-\frac{3}{4}\log\left(-\frac{3}{4}\right)}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-1+i$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}=e^{-\frac{3}{4}\log\left(-\frac{3}{4}\right)}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}\left\{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right\}=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-1-i$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}=e^{-\frac{3}{4}\log\left(-\frac{3}{4}\right)}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=1+i$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}=e^{-\frac{3}{4}\log\left(-\frac{3}{4}\right)}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}\left\{\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)\right\}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=1-i$$

以上より、$z=-\dfrac{k}{2m}$ （k、mは自然数）の場合、虚数$2m$個の値をとるので、「負の実数の偶数乗根」を求めること（例えば-1の平方根は虚数2個）と同様の結果を得る。

４．z が負の無理数の場合

$z=-r$ （r は正の無理数） とするとき、

$$\begin{aligned} z\log z &= -r(\log r+\pi i+2n\pi i) \\ &= -r\{\log r+(2n+1)\pi i\} \\ &= -r\log r-(2n+1)r\pi i \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} (-r)^{-r} &= \exp\{-r\log r-(2n+1)r\pi i\} \\ &= \exp(-r\log r)\exp(-(2n+1)r\pi i) \\ &= r^{-r}\{\cos(-(2n+1)r\pi)+i\sin(-(2n+1)r\pi)\} \end{aligned}$$

$-r$ は有理数ではないので偏角 $-(2n+1)r\pi$ の値に周期性はなく、$(-r)^{-r}$ は無限多価となる。よって、

> z が負の無理数の場合、z^z は無数に存在し、すべて虚数

$(-r)^{-r}$ の値は無数に存在するが、例を見るために、偏角の小さいものをひとつだけ表してみる。すなわち $z\log z=-r(\log r+\pi i)$ として、次の値を一例として求めてみる。

$$\begin{aligned} (-r)^{-r} &= \exp\{-r\log r-r\pi i\} \\ &= \exp(-r\log r)\exp(-r\pi i) \\ &= r^{-r}\{\cos(-r\pi)+i\sin(-r\pi)\} \end{aligned} \qquad ②$$

【例９】$z=-\sqrt{2}$ のとき、z^z の値のひとつは②より、

$$\begin{aligned} \left(-\sqrt{2}\right)^{-\sqrt{2}} &= \sqrt{2}^{-\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\sqrt{2}\pi\right)+i\sin\left(-\sqrt{2}\pi\right)\right\} \\ &\fallingdotseq -0.1630939979+0.5904359195i \end{aligned}$$

【例１０】$z=-e$ のとき、z^z の値のひとつは②より、

$$\begin{aligned} (-e)^{-e} &= e^{-e}\{\cos(-e\pi)+i\sin(-e\pi)\} \\ &\fallingdotseq -0.0417872966-0.0510709577i \end{aligned}$$

【例１１】$z=-\pi$ のとき、z^z の値のひとつは②より、

$$\begin{aligned} (-\pi)^{-\pi} &= \pi^{-\pi}\{\cos(-\pi^2)+i\sin(-\pi^2)\} \\ &\fallingdotseq -0.0247567717-0.0118013091i \end{aligned}$$

５．z が虚数の場合

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ （$\theta\neq n\pi$ 、n は整数） とするとき、

$$\begin{aligned} z\log z &= z(\log|z|+i\arg z) \\ &= z(\log r+\theta i) \\ &= r(\cos\theta+i\sin\theta)(\log r+\theta i) \\ &= r\{\log r\cdot\cos\theta-\theta\cdot\sin\theta+i(\log r\cdot\sin\theta+\theta\cdot\cos\theta)\} \end{aligned} \qquad ③$$

一般の複素数の例を少し見てみよう。z^z の値は無数に存在するが、例を見るために、偏角の小さいものをひとつだけ表してみる。すなわち $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$（$-\pi < \theta < \pi$ 、$\theta \neq 0$）として値を求めてみる。

【例12】$z = 1 + i$ のとき、正で最小の偏角は $\dfrac{\pi}{4}$ だから、

$$\begin{aligned} z\log z &= (1+i)\log(1+i) \\ &= (1+i)\left(\log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i\right) \\ &= \log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + i\left(\log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

よって、$(1+i)^{1+i}$ の値のひとつは、

$$\begin{aligned} (1+i)^{1+i} &= \exp\left\{\log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + i\left(\log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\} \\ &\fallingdotseq 0.2739572538 + 0.5837007588i \end{aligned}$$

【例13】$z = 2 + 3i$ のとき、正で最小の偏角は $\tan^{-1}\dfrac{3}{2}$ だから、

$$\begin{aligned} z\log z &= (2+3i)\log(2+3i) \\ &= (2+3i)\left(\log\sqrt{13} + i\tan^{-1}\frac{3}{2}\right) \\ &= 2\log\sqrt{13} - 3\tan^{-1}\frac{3}{2} + i\left(3\log\sqrt{13} + 2\tan^{-1}\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

よって、 $(2+3i)^{2+3i}$ の値のひとつは、

$$\begin{aligned} (2+3i)^{2+3i} &= \exp\left\{2\log\sqrt{13} - 3\tan^{-1}\frac{3}{2} + i\left(3\log\sqrt{13} + 2\tan^{-1}\frac{3}{2}\right)\right\} \\ &\fallingdotseq -0.6075666647 - 0.3087560181i \end{aligned}$$

さて、z が虚数のとき、z^z の値が実数になることがあるのか。あるとすればどんな場合かを考えてみる。③の$\{\quad\}$内の虚数部分が 0 になるときを考える。

$$\begin{aligned} \log r\cdot\sin\theta + \theta\cdot\cos\theta &= 0 \\ \log r\cdot\sin\theta &= -\theta\cdot\cos\theta \\ \log r &= \frac{-\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta} \\ r &= \exp\left(\frac{-\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta}\right) \end{aligned}$$

よって、z が偏角 θ のときに絶対値 $r = \exp\left(\dfrac{-\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ となるもの、すなわち

$$z = \exp\left(\frac{-\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta}\right)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

という形の虚数のとき、z^z は実数になることがわかる。

z がこの形の虚数のとき、z^z を求めよう。$\log r = \dfrac{-\theta \cdot \cos\theta}{\sin\theta}$ だから③より、

$$
\begin{aligned}
z\log z &= \exp\left(\frac{-\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left\{\left(\frac{-\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta}\right)\cdot\cos\theta - \theta\cdot\sin\theta\right\} \\
&= \exp\left(\frac{-\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left\{\left(\frac{-\theta\cdot\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}{\sin\theta}\right)\right\} \\
&= -\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\exp\left(\frac{-\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta}\right)
\end{aligned}
$$

よって

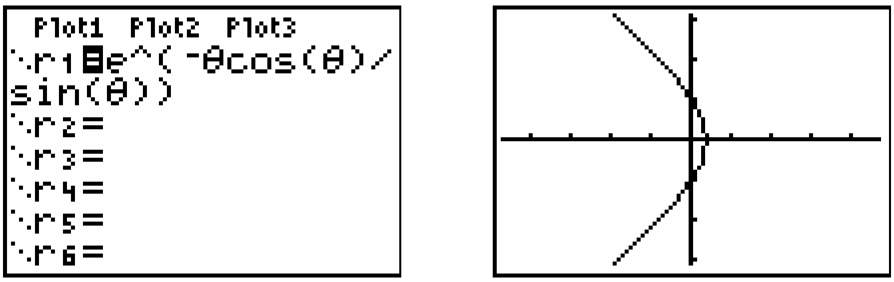
$$
z^z = e^{z\log z} = \exp\left\{-\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\exp\left(\frac{-\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right\}
$$

以上より、

z が $\exp\left(\dfrac{-\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta}\right)(\cos\theta + i\sin\theta)$ という形の虚数のとき、

z^z は $\exp\left\{-\dfrac{\theta}{\sin\theta}\cdot\exp\left(\dfrac{-\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right\}$ という実数になる。 ④

ガウス平面上に条件を満たす虚数をプロットしてみる。



条件を満たす虚数の分布（$-\pi < \theta < \pi$） MODE：Pol, ZOOM：ZDecimal

特に、$\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$（$n$ は整数）のとき z は純虚数となり、このとき絶対値 $r = \exp\left(\dfrac{-\theta\cdot\cos\theta}{\sin\theta}\right) = 1$ となるので、z^z が実数になる純虚数 z は $\pm i$ に限る。上のグラフの虚軸との交点が $\pm i$ である。

z^z が実数になる場合を確認してみよう。

【例14】$\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$（$n$ は整数）で④の条件を満たす z、すなわち $z = i$ のとき、

$$
z\log z = i\log i = i\left\{\log 1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i\right\} = -\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)
$$

よって

$$
i^i = \exp\left\{-\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right\}
$$

例えば$n=0$のときは、

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \fallingdotseq 0.2078795764$$

となるが、他にも$n=1$のとき$i^i = e^{-\frac{5\pi}{2}}$、$n=2$のとき$i^i = e^{-\frac{9\pi}{2}}$など無数に存在する。しかも、すべてが正の実数となる。

以上の結果としてわかったのは、

iのi乗は実数であった　*i.e.*　「私の愛情は本物であった」

【例15】$\theta = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$（$n$は整数）で④の条件を満たす$z$、すなわち$z=-i$のとき、

$$z\log z = (-i)\log(-i) = -i\left\{\log 1 + \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i\right\} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

よって

$$(-i)^{-i} = \exp\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

例えば$n=0$のときは、

$$(-i)^{-i} = e^{-\frac{\pi}{2}} \fallingdotseq 0.2078795764$$

となるが、他にも$n=1$のとき$(-i)^{-i} = e^{\frac{3\pi}{2}}$、$n=2$のとき$(-i)^{-i} = e^{\frac{7\pi}{2}}$など無数に存在する。しかも、すべてが正の実数となる。

他にもz^zが実数になる場合を見てみよう。

【例16】$\theta = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi$（$n$は整数）で④の条件を満たす$z$、すなわち$r$が次の値になる場合、

$$r = \exp\left\{\frac{-\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)}\right\}$$

$n=0$のとき、すなわち

$$z = \exp\left(\frac{-\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \exp\left(\frac{-\sqrt{3}\pi}{6}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

のとき、④より、

$$z^z = \exp\left\{-\frac{\pi}{3}\cdot\exp\left(\frac{-\sqrt{3}\pi}{6}\right)\right\} \fallingdotseq 0.6551891784$$

$n=1$のとき、すなわち

$$z=\exp\left(\frac{-\frac{13\pi}{6}\cdot\cos\frac{13\pi}{6}}{\sin\frac{13\pi}{6}}\right)\left(\cos\frac{13\pi}{6}+i\sin\frac{13\pi}{6}\right)=\exp\left(\frac{-13\sqrt{3}\pi}{6}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

のとき、④より、

$$z^z=\exp\left\{-\frac{13\pi}{3}\cdot\exp\left(\frac{-13\sqrt{3}\pi}{6}\right)\right\}\fallingdotseq 0.9998967834$$

さらにnの値を変えると、z^zの値は無数に存在する。しかも、すべてが正の実数となる。

＜参考文献＞「xのx乗のはなし」 土基善文著　日本評論社　2002 年