グラフ電卓で極限に近づく

生徒全員がグラフ電卓を持つ学校の授業実践報告＜数学III編＞

馬場博史

数学科

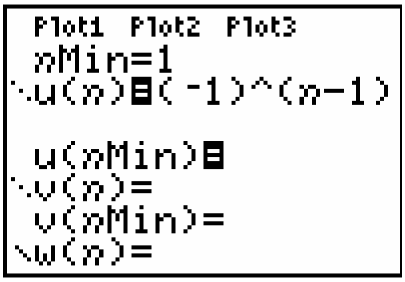
１．極限を計算だけでなく目で確認する

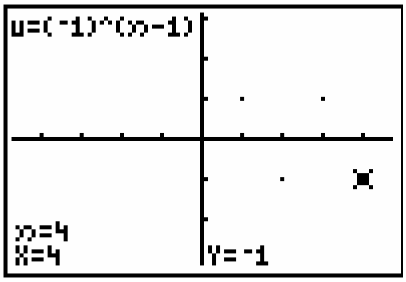
本校ではユニークなシステムのもと、生徒全員がグラフ電卓を持つ。瞬時に複雑な計算ができたり、グラフを描くことができるという利点を利用して、数列の極限、無限級数の和、関数の極限のいくつかの例をグラフ電卓で見てみる。

２．数列の極限

2.1. 一般項で表された数列 $a_n = (-1)^{n-1}$ の振動の様子

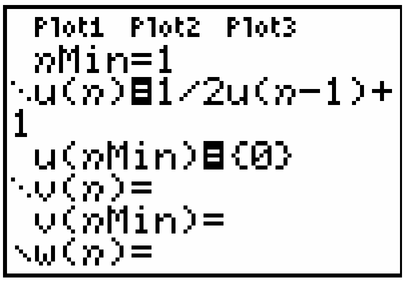
MODE を Seq に設定。Y=で次のように入力し、ZOOM を ZDecimal にしたグラフ。TRACE でｎ＝４の場合。

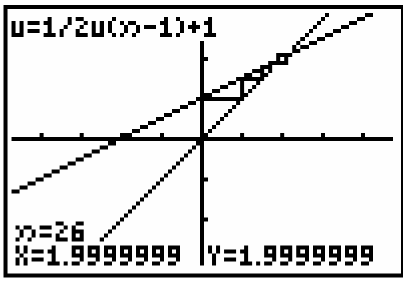




2.2. 漸化式で表された数列 $a_1 = 0$、$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1$ で定義される数列が極限値２に近づく様子

2nd+FORMAT で Web に設定。Y=で次のように入力し、ZOOM を ZDecimal にしたグラフ。TRACE でｎ＝26 の場合。このあと、ｎ＝27 で２と表示するが、これは計算された値と極限値との差がグラフ電卓の最小誤差の範囲内になるからであろう。

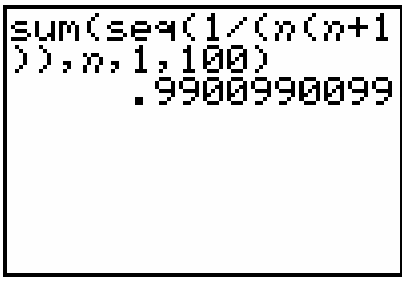


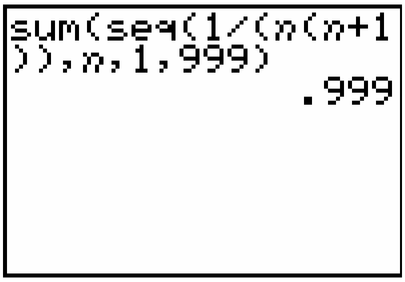


３．無限級数の和

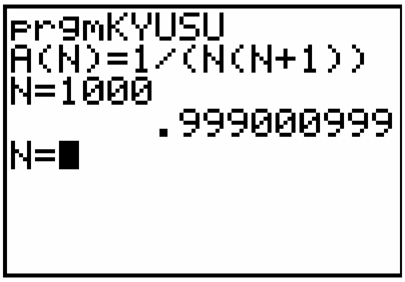
3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ が極限値１に近づく様子

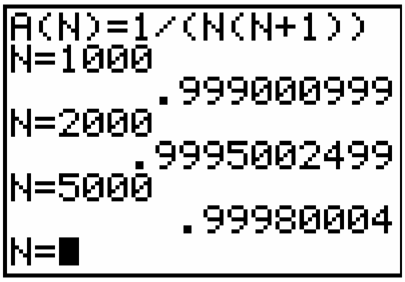
基本画面において、2nd+LIST の MATH で 5:sum(を選び、2nd+LIST の OPS で 5:seq(を選んだあと一般項を入力、第 100 項までの和と第 999 項までの和を求めた。seq(は 999 個しか数列を生成しないので、第 1000 項以降は Error となり、求められない。





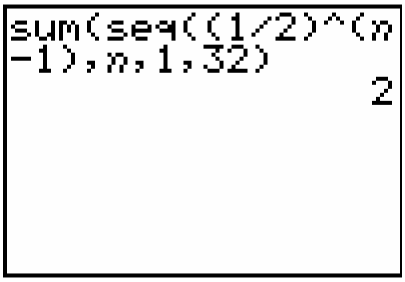
そこで、第 1000 項以上でも和を求められるプログラム prgmKYUSU（後述）を作成し、計算させた。この数列の場合は収束が遅く、第 5000 項まで計算してもまだこの値である。これ以上計算させても良いが、あまりにも時間がかかるので授業には適さない。





3.2. 幾何級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ が極限値２に近づく様子

上と同じように一般項を入力、これは収束が速く、第 32 項で２と表示する。



3.3.余談としてゼータ関数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ の紹介

ここで、$\zeta(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$（調和級数）と $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ が収束するかどうかを問う。「どちらも発散」または「どちらも収束」が大半を占め、正解の「前者が発散して後者が収束する」という回答は少数だった。

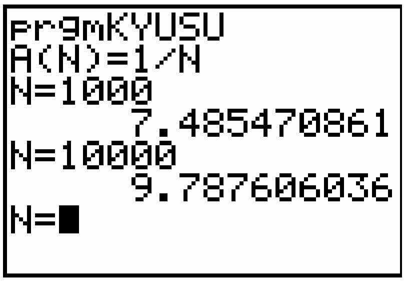
ζ(1)が発散することは容易に確かめられる。

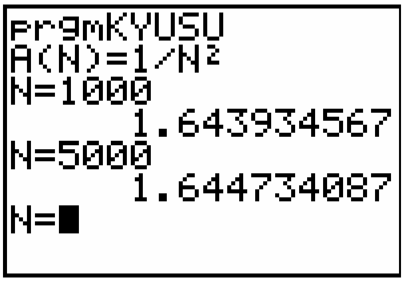
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

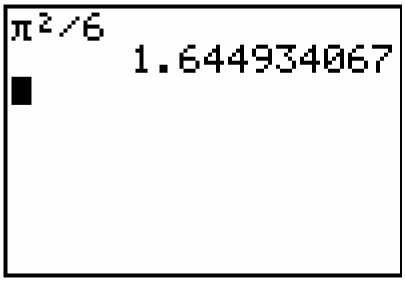
となり、このあとも同様なので、

$$\zeta(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\to\infty$$

さて、グラフ電卓で確かめると次のようになるが、後者の極限値 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ であることを紹介すると、一斉に驚きの声があがる。18 世紀にオイラーが発見したことに言及しておく。







ここでなぜ $\dfrac{\pi^2}{6}$ となるのか知りたいという当然の要望があった。これは、$\sin x$ のテーラー展開

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} \qquad \cdots①$$

と無限積表示

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \qquad \cdots②$$

の展開式の x^3 の係数を比較する。①②それぞれの n 次の係数を a_n、b_n とすると、

$$a_3=-\frac{1}{6}$$

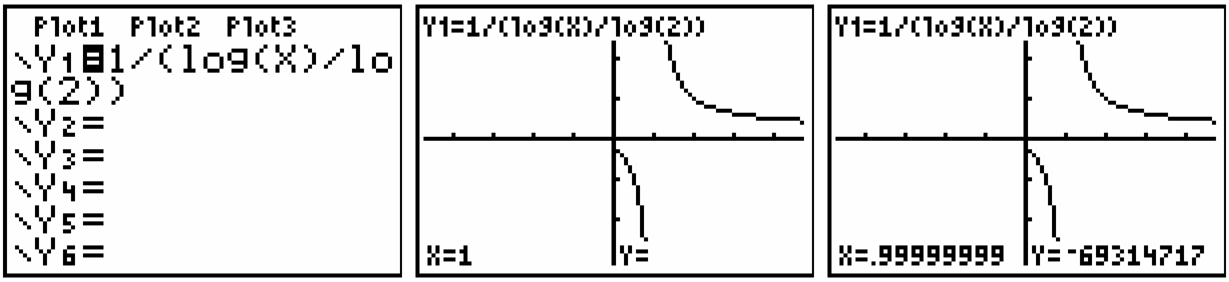
$$b_3=-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{4\pi^2}-\frac{1}{9\pi^2}-\cdots\cdots=-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots\right)=-\frac{1}{\pi^2}\zeta(2)$$

よって、$a_3=b_3$ より $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ となる。

４．関数の極限

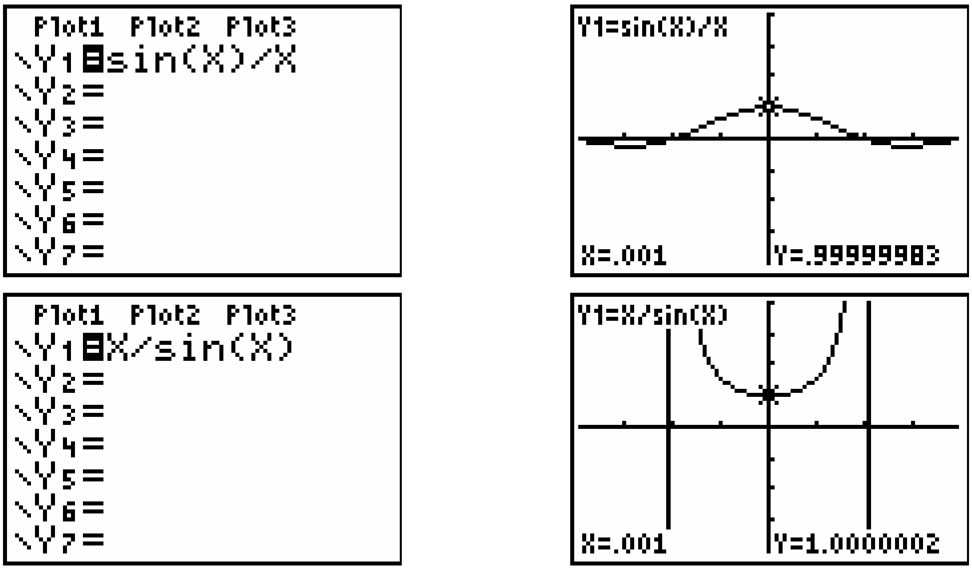
4.1. $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{\log_2 x}=-\infty$ の確認

MODE を Func に設定。Y=で次のように入力し、ZOOM を ZDecimal にする。2nd＋CALC の 1:value で X＝0 と入力しても、Y＝に値は出ない。X＝.999999999 を入力すると Y＝-69314717 と表示される。

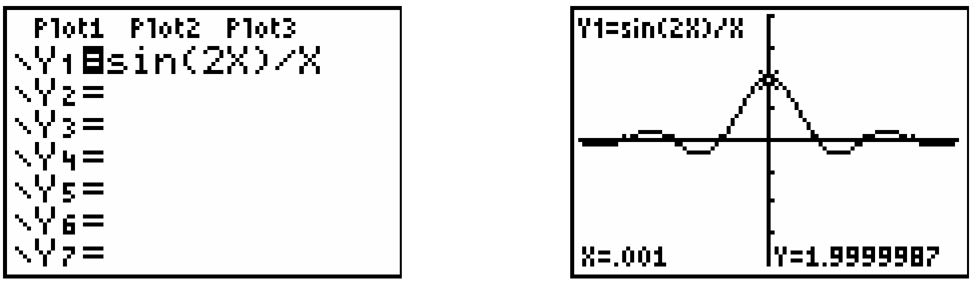


4.2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$、 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ の確認

Y=で次のように入力し、ZOOM を ZTrig にする。X＝.001 を入力すると 1 に近い値が表示される。

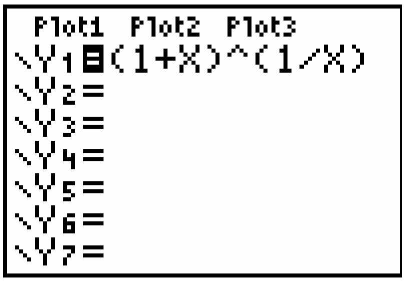


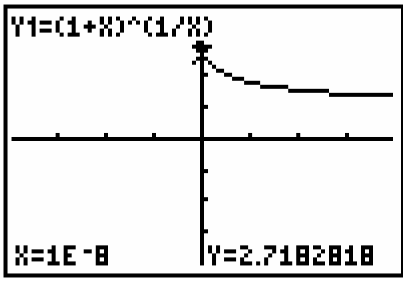
$x\to 0$ なら、$2x\to 0$ なので、最初は $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2$ となることは納得しにくいのだが、グラフで確認すると一目瞭然である。



4.3. $\lim_{x\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ が e に収束することの確認

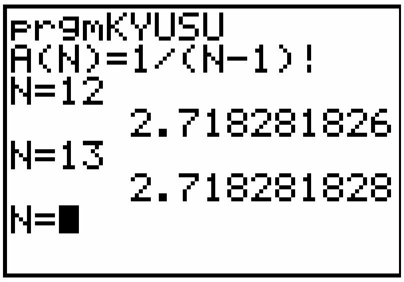
収束が遅いので、X＝10^-8 でようやく小数点以下 6 桁まで一致する。





微分をひととおり終えたら、e^x のテーラー展開で $x=1$ を代入した式から e が求められることを紹介する。これはずっと収束が速い。

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$



５．グラフ電卓を授業の中心に据えた数学科の授業

数学科では 1999 年度から、生徒全員にグラフ電卓を持たせ、それを日常的に最大限に利用する授業を追求している。グラフ電卓については、現在世界中でその活用が急速に進んでおり、多くの学校が積極的に参加してきている。さらには、IB（インターナショナル・バカロレア＝世界共通の大学入学資格試験）の科目（IB Math.S、IB Math.H)、米国の大学で教養課程の単位として認められる AP テスト（Advanced Placement Test）の科目（Calculus、Statistics)、米国の大学進学適性テスト SAT(Scholastic Aptitude Test)においても、グラフ電卓を利用しなければ受験できないもの、または利用した方が有利なものがある。一部に、このようなテクノロジーの使用は計算力の低下を招くとの懸念もあるが、利用の仕方によっては充分回避できるものであり、必要以上に計算にかけていた時間を論理的思考にあてることの効果の方が大きいと考える。数学科がグラフ電卓を授業の中心に据えているのは、主に以上の理由による。

全員がグラフ電卓を持つことによって、自分の指で操作した結果を間近に目にすることで、難しいグラフの描画や計算をあたかも自分で行ったように感じられ、講義を一方的に聴くのではなく、その都度グラフ電卓で確認しながら話の内容を理解できる。また、複雑な計算の検算にも大いに利用できる。

（付録）1000 項以上の和を求るプログラム

```
Lbl 11
Input "A(N)=",Str1
If Str1="0"
Then
Goto 22
Else
Str1→Str2
End
Lbl 22
Input "N=",M
If M=0
Then
Goto 11
End
0→S
For(N,1,M)
S+expr(Str2) →S
End
Disp S
Goto 22
```