グラフ電卓でフーリエ級数を見る

生徒全員がグラフ電卓を持つ授業の実践報告＜数学III編＞

馬場博史
数学科

１．高校生になぜフーリエ級数か

本校ではユニークなシステムのもと、生徒全員がグラフ電卓を持つ。数学IIIの微分法を終わればテーラー級数展開を導くことができるが、積分法を終わればフーリエ級数展開を導く準備ができる。フーリエ係数を求める計算は積分計算のいい練習になるうえ、近い将来学ぶ内容を知ることで次の学習への動機づけとなる。瞬時にグラフを描けるという利点を利用して、いくつかのフーリエ級数展開の例をグラフ電卓で見てみる。

２．フーリエ級数を求める

2.1. フーリエ係数 a_n、b_n を決めるための準備

フーリエ級数展開は周期関数を三角関数の級数で次のように展開する。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \cdots\cdots ①$$

フーリエ係数 a_n、b_n を決めるためにまず次式が成り立つことを確認する。

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$、$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$

(2) $m \neq n$ のとき、$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0$、$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0$

$$\because \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \times 2\int_0^{\pi} \{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\} dx \text{（積→和の公式）}$$

$$= \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{\pi} = 0$$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0$ （∵ 奇関数）

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi$、$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi$ （∵ 半角の公式）

2.2. フーリエ係数 a_n、b_n を求める。

①を項別積分して上の(1)～(4)の結果をあてはめると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0 \qquad \text{よって、} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

①に $\cos mx$ を掛けたものを項別積分して上の(1)～(4)の結果をあてはめると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \pi a_m \qquad \text{よって、} a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx$$

①に $\sin mx$ を掛けたものを項別積分して上の(1)～(4)の結果をあてはめると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx = \pi b_m \qquad \text{よって、} b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx$$

以上より①の係数が決まり、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と展開される。

ただし、$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$、$a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$、$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$

３．グラフ電卓でフーリエ級数を見る

3.1. $y = x$ $(-\pi < x < \pi)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0$$ （∵ 奇関数)、

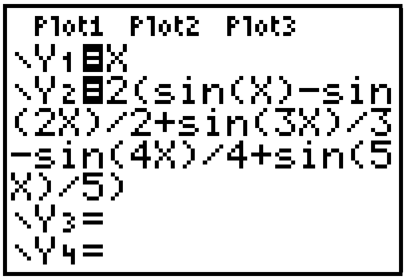
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[x\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n}\cos nx dx$$

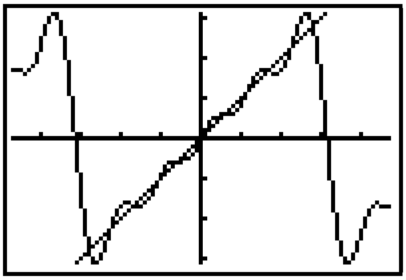
$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{n}\cos n\pi - \frac{\pi}{n}\cos(-n\pi)\right\} = \left\{-\frac{1}{n}(-1)^n - \frac{1}{n}(-1)^n\right\} = \frac{2\times(-1)^{n-1}}{n}$$

よって、$y = x$ （$-\pi < x < \pi$ ）は次のようにフーリエ展開される。

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}$$

$$= 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \cdots\right)$$





なお、ここで両辺を２で割って、

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \cdots$$

特に $x = \dfrac{\pi}{2}$ をあてはめれば、次式が得られる。

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$ （ライプニッツの級数）

3.2. $y = x^2$ $(-\pi < x < \pi)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = 0$$ （∵ 奇関数)、

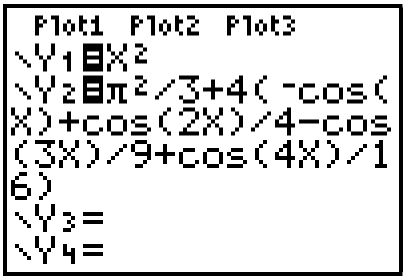
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[x^2 \cdot \frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx$$

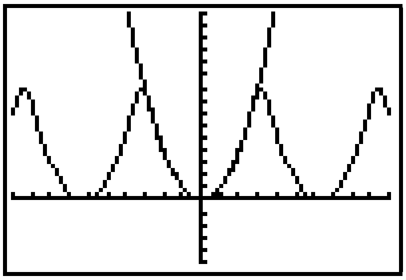
$$= -\frac{4}{n\pi}\left\{\left[x\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right\} = \frac{4}{n^2\pi}\left[x\cos nx\right]_0^{\pi} = (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}$$

よって、$y = x^2$（$-\pi < x < \pi$）は次のようにフーリエ展開される。

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}\cos nx$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 5x}{25} + \cdots\right)$$





3.3. $y = |x|$ $(-\pi < x < \pi)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx dx = 0$$ （∵ 奇関数)、

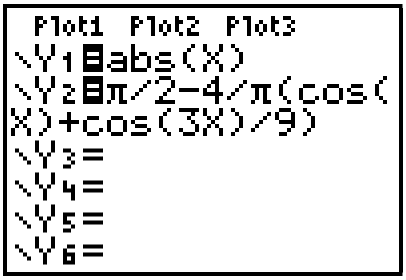
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx$$

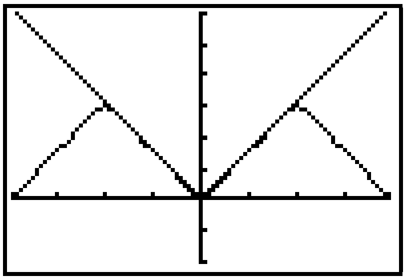
$$= -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left\{(-1)^n - 1\right\}$$

よって、$y = |x|$（$-\pi < x < \pi$）は次のようにフーリエ展開される。

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots \right)$$





3.4. $y = e^x$ （$-\pi < x < \pi$）

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}$$

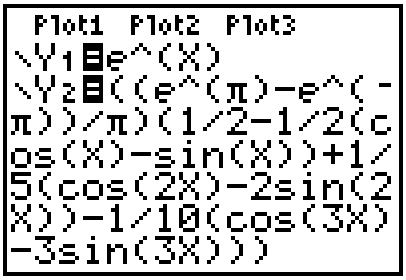
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$ （計算は少し複雑）

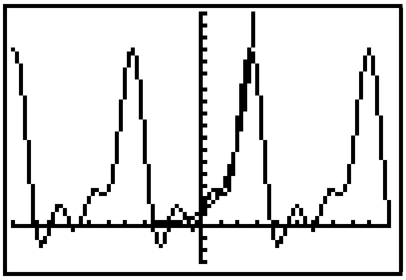
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \cdot \frac{-n(-1)^n}{n^2 + 1}$$ （計算は少し複雑）

よって、$y = e^x$（$-\pi < x < \pi$）は次のようにフーリエ展開される。

$$e^x = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{ \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}(\cos nx - n\sin nx) \right\} \right)$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos x - \sin x) + \frac{1}{5}(\cos 2x - 2\sin 2x) - \frac{1}{10}(\cos 3x - 3\sin 3x) + \cdots \right)$$





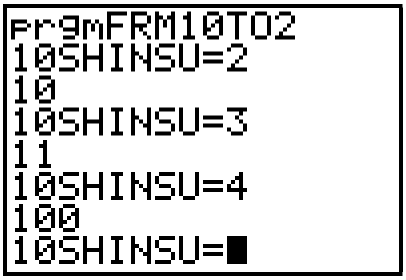
４．グラフ電卓による成果

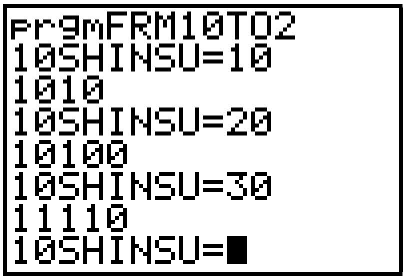
大学の教養課程のテキストなどでフーリエ級数を扱っている書籍の多くは、級数の式までは求めてもそのグラフまではあまり掲載されていない。近似式だけを求めるより、その式によるグラフが元の関数のグラフとどれだけ重なり合うかを自らの手で容易に観察できることによって、計算の正しさも確認でき、さらに理解が深まることになる。実際、テーラー展開と比較して、近似式を導出する過程が若干複雑ではあったが、計算結果がグラフ電卓によって正しいと確認できた時の生徒の喜びはさらに大きいものであった。

＜補足＞

10 進数を２進数に変換するプログラム

```
Lbl ST
Input "10SHINSU=",J
If J=0
Then
Disp J
Goto ST
End
"N"→Str1
While J>0
If J/2=int(J/2)
Then
J/2→J
"0"+Str1→Str1
Else
int(J/2)→J
"1"+Str1→Str1
End
End
Disp sub(Str1,1,length(Str1)-1)
Goto ST
```





２進数を 10 進数に変換するプログラム

```
Lbl ST
Input "2SHINSU=",Str1
length(Str1)→N
For(L,N,1,-1)
If sub(Str1,N-(L-1),1)≠"1" and sub(Str1,N-(L-1),1)  ≠"0"
Then
Goto ST
End
End
0→A
For(M,N,1,-1)
If sub(Str1,N-(M-1),1)="1"
Then
A+2^(M-1)→A
End
End
Disp A
Goto ST
```