グラフ電卓を用いた数学Ⅲ「近似式」の学習

生徒全員がグラフ電卓を持つ学校の実践報告＜数学III編＞

馬場博史
数学科

１．整関数近似式

現行の数学Ⅲでは種々の関数の整関数への近似は一次式しか扱わないが、グラフ電卓を有効に利用するため、そこから一歩先に進んでマクローリン展開による整関数近似式を求め、グラフで実際に比較した後、例として e や $\sin 1°$ などの近似値を求める。さらに $x=0$ の近くでなくてもより良い近似を得るためテーラー展開に言及。最後にオイラーの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を導き、$e^{i\pi}=-1$ が成り立つところまでの感動を味わう。

２．マクローリン級数を示す

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$$

と書けるとする。

$x=0$ を代入して $f(0)=a_0$ $\quad\therefore a_0=f(0)$

両辺微分して

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\cdots$$

$x=0$ を代入して $f'(0)=a_1$ $\quad\therefore a_1=f'(0)$

両辺微分して

$$f^{(2)}(x)=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+30a_6x^4+\cdots$$

$x=0$ を代入して $f^{(2)}(0)=2a_2=2!a_2$ $\quad\therefore a_2=\dfrac{f^{(2)}(0)}{2!}$

両辺微分して

$$f^{(3)}(x)=6a_3+24a_4x+60a_5x^2+120a_6x^3+\cdots$$

$x=0$ を代入して $f^{(3)}(0)=6a_3=3!a_3$ $\quad\therefore a_3=\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}$

以後同様に

$$a_4=\frac{f^{(4)}(0)}{4!},\quad a_5=\frac{f^{(5)}(0)}{5!},\quad \cdots\cdots,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

よってマクローリン級数

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

が得られる。

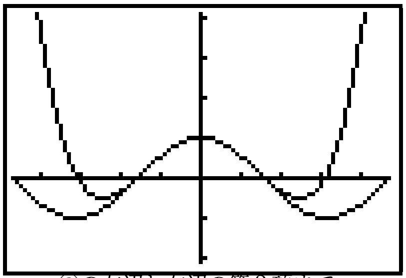
３．指数関数・三角関数をマクローリン級数で表す

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots \quad ①$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots \quad ②$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots \quad ③$$

　ここで左辺と右辺の数項を同時にグラフ電卓で描き出す。これらを初めて目の当たりにするとき、その美しく重なる様に驚嘆する。

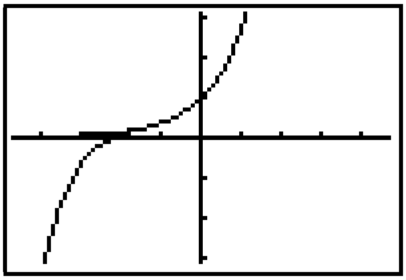

③の左辺と右辺の第３項まで

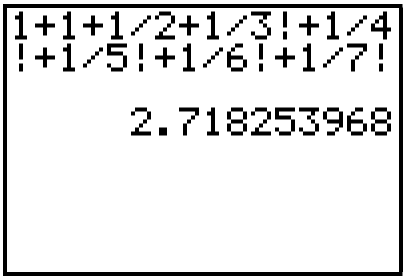
４．近似値を求めてみる

　①で $x=1$ を代入して、

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

　$n=7$ まで計算すると 2.71825…となり、小数第４位まで正しく求められる。

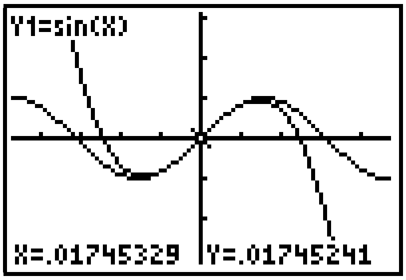

①の左辺と右辺の第６項まで



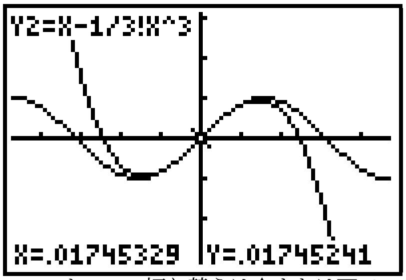
　②で $x=\frac{\pi}{180}$（グラフ電卓の表示はπ /180 ＝0.01745329）を代入して、

$$\sin 1^\circ = \sin\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} - \frac{1}{3!} \times \left(\frac{\pi}{180}\right)^3 + \cdots$$

　$n=3$ まで計算して、0.01745241…となり、小数第 8 位まで正確な値が求められる。



2 nd→CALC→1:value→X=π /180

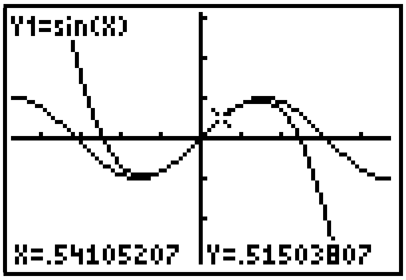


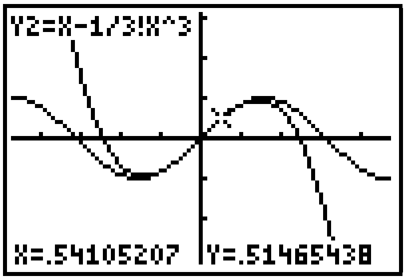
Y1 と Y2 の切り替えは▲または▼で

　ここでもうひとつ、②で $x=\frac{31\pi}{180}$（グラフ電卓の表示は 31π /180 ＝0.54105207）を代入してみる。

$$\sin 31^\circ = \sin\frac{31\pi}{180} = \frac{31\pi}{180} - \frac{1}{3!} \times \left(\frac{31\pi}{180}\right)^3 + \cdots$$

　$n=3$ まで計算しても 0.51465438…となり、次図のようにあまりよく近似できない。





そこで $x=\dfrac{\pi}{3}$ の近くでより良い近似値を得るため、テーラー級数に言及する。

５．テーラー級数を導く

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+a_4(x-a)^4+\cdots$$

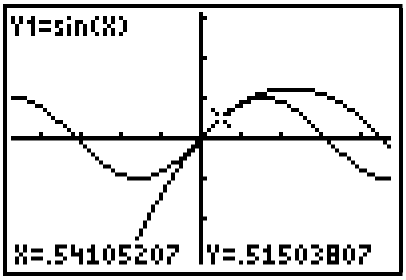
と書けるとして、マクローリン展開と同様にして次式を得る。

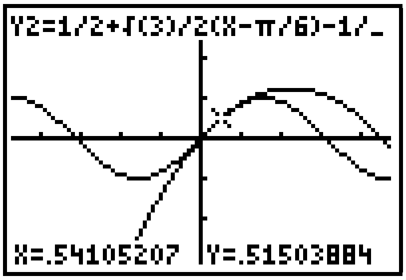
$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

これに $a=\dfrac{\pi}{6}$ をあてはめて、

$$\sin x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3-\cdots \quad ②'$$

となり、 $x=\dfrac{31\pi}{180}$ を代入すると、下図のように $n=2$ まででも 0.51503884…となり、②より②'の方が良い近似値が得られる。





６．オイラーの公式を導く

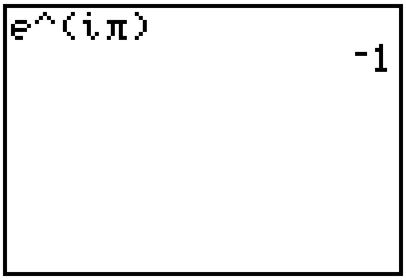
①で x を ix に書きかえると（i は虚数単位）、

$$\begin{aligned}e^{ix}&=1+ix+\frac{1}{2}(ix)^2+\frac{1}{3!}(ix)^3+\frac{1}{4!}(ix)^4+\frac{1}{5!}(ix)^5+\cdots\\&=1+ix-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3!}ix^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}ix^5-\cdots\\&=\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots\right)+i\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots\right)\\&=\cos x+i\sin x\end{aligned}$$

となり、 $x=\pi$ を代入すれば、次の等式が導ける。

$$e^{i\pi}=-1$$

以前より知っている不思議な数である円周率π と、高校で出てきた不思議な数、虚数単位 i と自然対数の底 e が、このようにひとつの関係式でつながり、しかもその値が簡単な整数になることの感動を味わいたい。



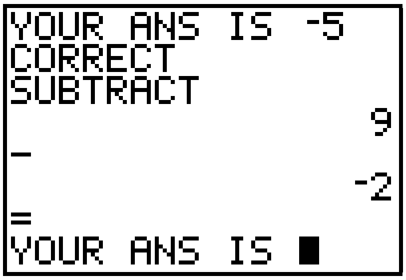
７．グラフ電卓の効用

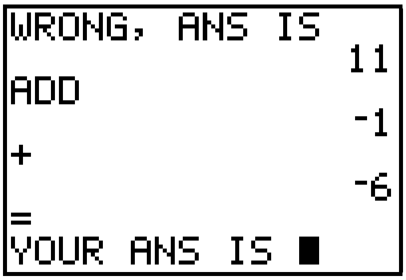
この話題でグラフ電卓を利用することの効用は極めて大きい。５次関数、６次関数などの高次関数になっても、グラフ電卓があれば瞬時にグラフを描き、また近似値も瞬時に計算できるので、そのために中断することなくスムーズに話を進めることができる。

また、全員がグラフ電卓を持つことによって、それを自分の指で操作した結果を間近に目にすることで、難しいグラフの描画や計算をあたかも自分で行ったような気分になれるうえ、さらに、講義を一方的に聴くのではなく、その都度自分で話の内容をグラフ電卓で確認しながら理解できるのである。

（補）中１正の数・負の数の計算練習プログラム

正負の数の計算は、むしろ乗除より加減のほうが間違いやすい。そこで乱数を利用し、次々に問題が出てきて、答を入力すると正誤を判定するプログラムを作成し、計算の苦手な生徒のグラフ電卓に「transmit」して各自で練習させた。（なお、乗除の計算も一部を変えれば簡単に作成できる。）






```
Lbl 99
randInt(-9,9)→A
randInt(-9,9)→B
If (A≧0 and B≧0) or (A=0 xor B=0)
Then
Goto 99
Else
A+B→C
Disp "ADD"
Disp A,"+",B,"="
Input "YOUR ANS IS ",D
If D=C
Then
Disp "CORRECT"
Goto 98
Else
Disp "WRONG, ANS IS",C
Lbl 98
randInt(-9,9)→A
randInt(-9,9)→B
If (A≧0 and B≧0) or (A=0 xor B=0)
Then
Goto 98
Else
A-B→C
Disp "SUBTRACT"
Disp A,"-",B,"="
Input "YOUR ANS IS ",D
If D=C
Then
Disp "CORRECT"
Goto 99
Else
Disp "WRONG, ANS IS",C
Goto 99
```