物体の放物運動の軌跡

1. この話題のきっかけ

たまたまインターネットの検索で次のページに出会った。

◇

【放物線の美学】　http://www.fan.hi-ho.ne.jp/ushigoh/page009.html

質量 m の物体を、水平との角度αで斜めに初速度 V で発射し、発射後の時間を t とし、重力加速度を g とすると、(以下、X の n 乗を Xn と表記。・は積を意味する)

水平方向の座標　X=Vcosα・t

垂直方向の座標　Y=Vsinα・t－1/2・g・t2=tanα・X－1/2・g・(1/Vcosα)2・X2

となり、放物線の方程式(関数の式)が決定される。

問 1.　物体が最も遠くまで到達する場合、その時の発射角度は?　(高校物理で学習済)

解答　上記方程式で Y=0 とし、到達距離は(V2/g)2・sinα・cosαとなり、sinα・cosα=1/2・sin2αだからα=45 度で到達距離は最大となる。

問 2.　物体の放物線運動が最も美しく(雄々しく)見える場合、その時の発射角度は?

解答　"雄々しく見える"を、放物線と地平線が囲む面積が最大と解釈する。その面積は定積分により、2/3・(V4/g2)・(sinα)3・cosαとなり、α=60 度で、この面積が最大となる。 (興味のある諸氏は計算されたし)　この 60 度の発射角度が、今回発見した放物線の美学である。

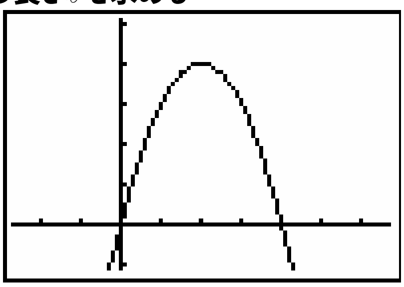
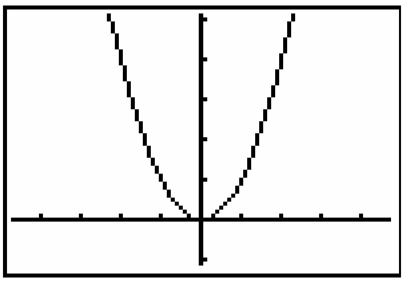
問 3.　物体の平均速度は最大値・最小値のいずれを持つのか、もしくは持たないのか?

解答　着地時間は、上記方程式から、2・(V/g)・sinαはあきらかである。ここで放物線の長さが判れば、平均速度は両者の商となる。（2005/3/21 現在）

◇

問１は良く知られているが、問２の着眼は面白い。大学入試センター試験に出てきそうな問題でもある。問３で「平均速度」が「放物線の長さと着地時間の商」と書かれてあるが、速度は向きを持つベクトルで、速さはその大きさであるので、正確には「平均の速さ」を求めたいのであろうと考えられた。この時点で解答は掲載されていなかった。

2. 放物線の長さℓを求める

この図からもわかるように、

放物線 $y=-\dfrac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2+\tan\alpha\cdot x$ の、区間 $\left[0,\ \dfrac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right]$ の長さ ℓ は、

放物線 $y=\dfrac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2$ の、区間 $\left[-\dfrac{v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g},\ \dfrac{v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right]$ の長さに等しい。

さらに $\dfrac{g}{2v^2\cos^2\alpha}=a$、$\dfrac{v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=b$ とおけば、

放物線 $y=ax^2$ の、区間 $[-b,\ b]$ の長さに等しいといえる。

曲線の長さの公式 $\ell=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ より、

$$\ell=\int_{-b}^{b}\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx=2\int_0^b\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx \qquad (\because 偶関数)$$

$2ax=X$ と置換すると、

$$=\frac{1}{a}\int_0^{2ab}\sqrt{1+X^2}\,dX$$

●ここで不定積分 $\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\dfrac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2}+\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\}+C$ を計算しておく。

$y=\sqrt{1+x^2}$ は、$y^2-x^2=1$（双曲線）となるので、

$y=\cosh t\left(=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)$、$x=\sinh t\left(=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\right)$（双曲線関数）と置換すると、

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\int\cosh^2 t\,dt=\int\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}dt$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2t}+2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)+C$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}e^{2t}+4t-e^{-2t}\right)+C$$

ここで、$\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}=x$ より、$e^{2t}-2xe^t-1=0$ だから、$e^t=x+\sqrt{1+x^2}$（$\because e^t>0$）

すなわち $t=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ となるからこれを代入して、

$$=\frac{1}{8}\left\{4x\sqrt{1+x^2}+4\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\}+C$$

$$=\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2}+\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\}+C \qquad //$$

よって、求める放物線の長さは、

$$\ell=\frac{1}{2a}\left[X\sqrt{1+X^2}+\log\left(X+\sqrt{1+X^2}\right)\right]_0^{2ab}$$

$$=\frac{1}{2a}\left\{2ab\sqrt{1+4a^2b^2}+\log\left(2ab+\sqrt{1+4a^2b^2}\right)\right\}$$

a、b を元の値に戻す。$2ab=\tan\alpha$ だから、

$$=\frac{v^2\cos^2\alpha}{g}\left\{\tan\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha}+\log\left(\tan\alpha+\sqrt{1+\tan^2\alpha}\right)\right\}$$

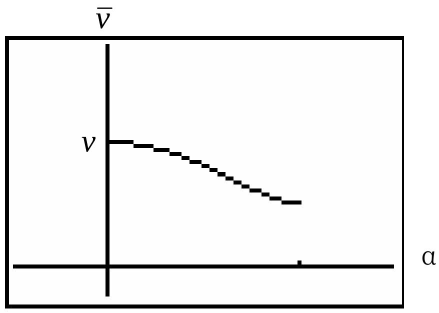
これが、物体が実際に移動した道のりになる。

3. 平均の速さの最大値･最小値の考察

落下するまでにかかった時間は $t=\dfrac{2v\sin\alpha}{g}$ だから、結局この間の平均の速さ $\bar{v}$ は α の関数として次式で与えられる。

$$\bar{v}=\frac{\ell}{t}=\frac{v\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}\left\{\tan\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha}+\log\left(\tan\alpha+\sqrt{1+\tan^2\alpha}\right)\right\}\qquad（0<\alpha<\frac{\pi}{2}）$$

発射角度 α と平均の速さ $\bar{v}$ をグラフ電卓（TI-83 Plus）で描いてみると図のようになる。



横軸は発射角度、縦軸は平均の速さ

物体が放物線を描くのは $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ だから、グラフからわかるように開区間で単調減少であるから、最大値・最小値は存在しない。

$\alpha=0$ の場合、到達距離は 0 、かかる時間も 0 なので、初速度 v を平均の速さと考えるなら、これが最大値といえる。

$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ の場合も考えるなら、物体は真上に上がり、道のり ℓ は最高点の高さ×2 $=\dfrac{v^2}{g}$、落下するまでにかかる時間 t は $\dfrac{2v}{g}$ だから、平均の速さ $\bar{v}=\dfrac{\ell}{t}=\dfrac{v}{2}$ となり、最小値は $\dfrac{v}{2}$ といえる。

実際、上のグラフからもわかるように、$\lim_{\alpha\to 0}\bar{v}=v$、$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\bar{v}=\dfrac{v}{2}$ となっている。