放物線の長さ

曲線の長さ

数学IIIの教科書で曲線の長さを求める例題に、サイクロイドやアステロイド（星芒形）、カテナリー（懸垂線＝均一な紐状のものの両端を固定してぶら下げてできる曲線）などがあります。これらは計算が比較的容易なので例題としてよく使われますが、意外に難しいのが放物線の長さです。いくつか求める方法がありますので紹介します。

＜例題＞　曲線　$y = x^2$　の　0≦ x ≦1　の部分の長さ　l　を求めよ。

曲線の長さの公式より、次の式になるがこの計算が意外に複雑である。

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$
$$= \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

＜方法1＞

参考書でも紹介されている方法で、$t = 2x + \sqrt{1+4x^2}$ とおく。

$$l = \int_1^{2+\sqrt{5}} \sqrt{1+4x^2} \cdot \frac{\sqrt{1+4x^2}}{2\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)}dt$$
$$= \frac{1}{8}\int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{t^4+2t^2+1}{t^3}dt$$
$$= \cdots$$

（参考：数研出版「チャート式数学III」）

＜方法2A＞

最も素直に思いつく置換で、$2x = \tan\theta$ とおく。

$$l = \int_0^{\tan^{-1}2} \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{2\cos^2\theta}d\theta$$

（$\tan^{-1}2$ は $\tan\theta = 2$ を満たす角）

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\tan^{-1}2} \frac{1}{\cos^3\theta}d\theta$$

さらに $\sin\theta = t$ とおくと、

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{1}{(1-t^2)^2}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \left(\frac{1}{1-t^2}\right)^2 dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)^2 dt$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\left(\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{2}{(1-t)(1+t)}+\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt$$

$$=\cdots$$

(参考：http://www.uja.jp/contents/math/lenparabola.html)

＜方法2B＞

途中から同じような部分分数展開になる方法。このやり方は積分区間に∞が出てくるので、不定積分を先に計算して後で数値を代入する。

まず $x^2=y$ とおくと、

$$\int\sqrt{1+4x^2}dx=\int\sqrt{1+4y}\cdot\frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

$$=\int\sqrt{1+\frac{1}{4y}}dy$$

$4y=z$ とおく。

$$=\int\sqrt{1+\frac{1}{z}}\cdot\frac{dz}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\int\sqrt{1+\frac{1}{z}}dz$$

$\frac{1}{z}=t$ とおく。

$$=\frac{1}{4}\int\sqrt{1+t}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{1+t}}{t^2}dt$$

$1+t=u$ とおく。

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{u}}{(u-1)^2}du$$

$u=s^2$ とおく。

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{s}{(s^2-1)^2}\cdot 2sds$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{2s^2}{(s^2-1)^2}ds$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{4s^2}{(s^2-1)^2}ds$$

$$=-\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s-1)^2}\right)ds$$

$$=-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{s+1}+\log(s-1)-\log(s+1)-\frac{1}{s-1}\right)+C$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{2s}{s^2-1}+\log\frac{s+1}{s-1}\right)+C$$

ここで置換した順を逆にたどっていくと $s=\dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{2x}$ となるので代入すると、

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\log\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)+C$$

（他の方法も不定積分はこの式になります）

よって、求める放物線の長さ l は、

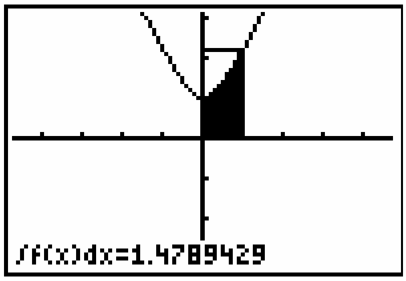
$$l=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{4}\log\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)\right]_0^1$$

$=\cdots$

（参考：http://web2.incl.ne.jp/yaoki/ahoub2en.htm）

<方法3A>

$y=\sqrt{1+4x^2}$ のグラフと、x 軸、y 軸、直線 $x=1$ とで囲まれる面積を考える方法。このままでは計算が上の２つの方法のように複雑なので、y で積分して、長方形の面積から図の白い部分の面積を引く。双曲線関数に置換する。



$$l=\sqrt{5}-\int_1^{\sqrt{5}}\frac{1}{2}\sqrt{y^2-1}\,dy$$

$$=\sqrt{5}-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{5}}\sqrt{y^2-1}\,dy$$

ここで $y=\cosh t\left(=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)$ とおく。

$$l=\sqrt{5}-\frac{1}{2}\int_0^{\log(2+\sqrt{5})}\sinh t\cdot\sinh t\,dt$$

$$=\sqrt{5}-\frac{1}{2}\int_0^{\log(2+\sqrt{5})}\sinh^2 t\,dt \qquad \left(\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)$$

$$=\sqrt{5}-\frac{1}{2}\int_0^{\log(2+\sqrt{5})}\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}dt$$

$=\cdots$

（参考：http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/taiwa2/kensui/node5.html）

<方法3B>

はじめから双曲線関数に置換する方法で、$2x=\sinh t\left(=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\right)$ とおく。

$$l=\int_0^{\log(2+\sqrt{5})}\cosh t\cdot\frac{\cosh t}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\log(2+\sqrt{5})} \cosh^2 t \, dt$$

$$= \cdots$$

(参考：http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kiso3/sekibun.pdf)

＜方法4＞

はじめに部分積分をして、$\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ の積分計算に帰着する方法。

$$l = \int_0^1 (x)' \cdot \sqrt{1+4x^2}\, dx$$

$$= \left[x\sqrt{1+4x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}} dx$$

$$= \sqrt{5} - \int_0^1 \frac{1+4x^2-1}{\sqrt{1+4x^2}} dx$$

$$= \sqrt{5} - \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx$$

$$= \sqrt{5} - l + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx$$

よって、l を左辺に移項して 2 で割ると次式を得て、あとは上の＜方法１～３＞のいずれかと同様の置換をすれば解ける。

$$l = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx$$

$$= \cdots$$

(参考：http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kiso3/sekibun.pdf)

●いずれも結果は次の値になるので各自で計算して確認して下さい。

$$\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\log(2+\sqrt{5})}{4} \qquad 1.47894285\cdots$$